Unidad 1. Números Reales

TEMAS

Unidad 1. Números Reales

Es posible que ya se esté familiarizado con los conjuntos numéricos, sin embargo, repasaremos el conjunto de los números reales y las operaciones que los involucran.

Es necesario dominar estos conceptos y conocimientos técnicos para no incurrir en errores en el desarrollo de los cursos posteriores.

Propiedades de los números reales

El conjunto de los números reales está compuesto por los siguientes subconjuntos: **Los naturales, los enteros, los racionales y los irracionales.** Siguiendo el siguiente diagrama de Euler.

De clic en la imagen para ampliar la información

Los números se originaron para suplir distintas necesidades, por ejemplo:

$\mathbb{N}$	**Naturales** Para contar
$\ominus$	**Negativos** Para representar deudas
$\mathbb{Q}$	**Racionales** Para segmentaciones, situaciones como “media libra de queso”
$\mathbb{I}$	**Irracionales** Para medidas como la altura de un triángulo equilátero

Todos estos, al conformar los números reales cumplen las siguientes propiedades:

1

Conmutativa: Esta propiedad nos indica que, al cambiar el orden de los términos, no afecta el resultado y aplica tanto para la multiplicación como para la suma.

$$a + b = b + a \qquad a * b = b * a$$

$$3 + 2 = 2 + 3 \qquad 3 * 4 = 4 * 3$$

2

Asociativa: El resultado de la suma o multiplicación de 3 números es el mismo sin importar cuales dos se operan primero.

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad a * (b * c) = (a * b) * c$$

$$1 + (2 + 3) = (1 + 2) + 3 \qquad 3 * (4 * 5) = (3 * 4) * 5$$

3

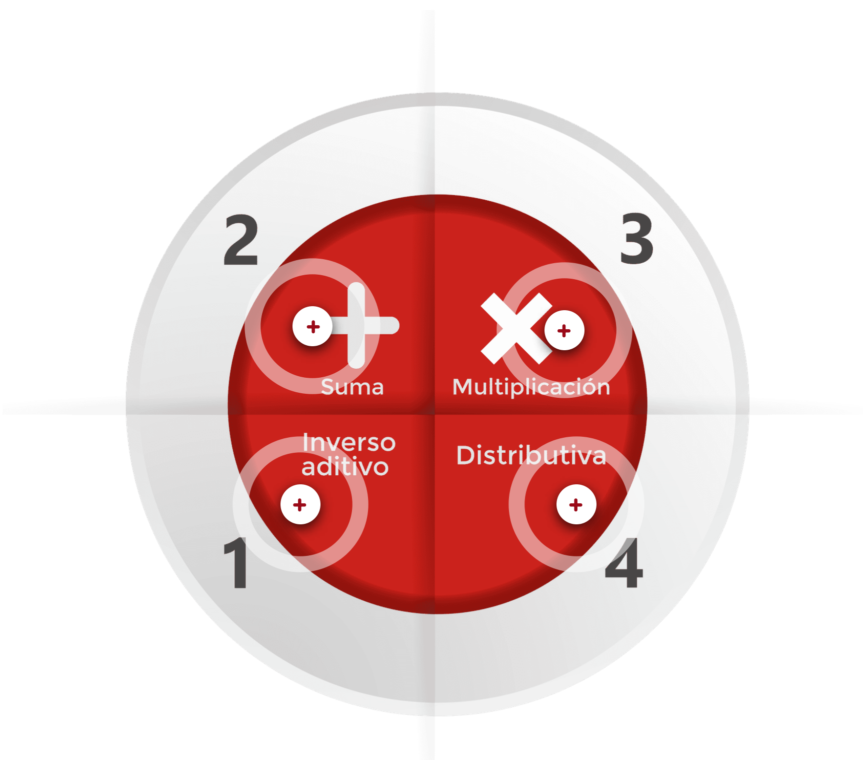
Distributiva: Al multiplicar por la suma de dos números es igual a multiplicar por cada uno y luego realizar la suma.

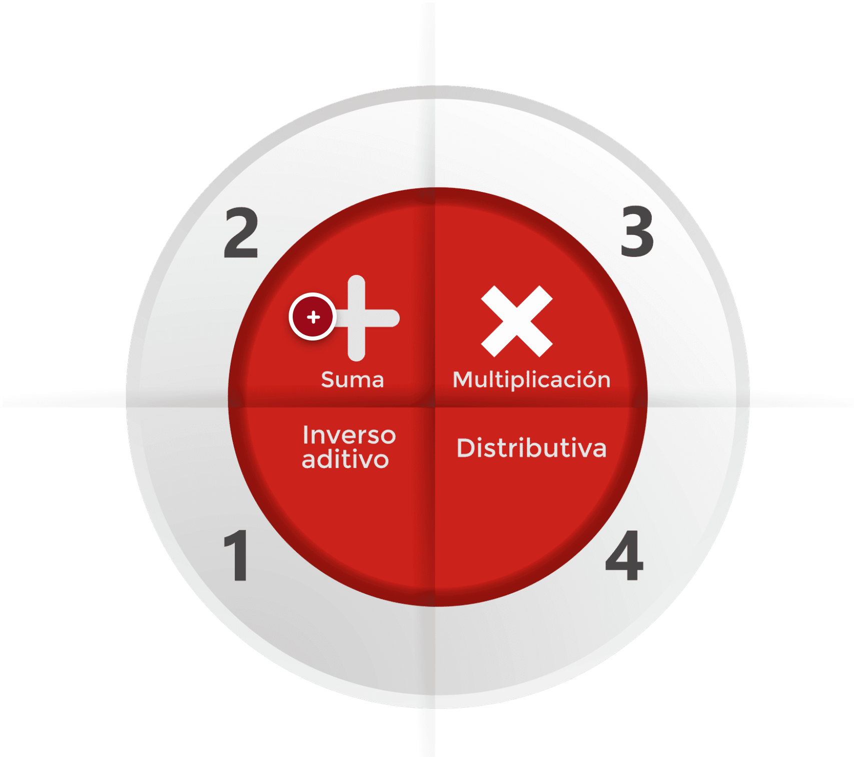
$$a(b + c) = ab + ac$$

$$3(x + 1) = 3x + 3$$

Adición y sustracción

Como vimos en la anterior sección, **hay distintas propiedades para los números reales**; sin embargo, estas no están limitadas únicamente a las anteriormente mencionadas. Una de las más importantes, y donde frecuentemente se cometen errores sin importar el nivel de las matemáticas que estemos manejando, corresponde a las **leyes de los signos**.

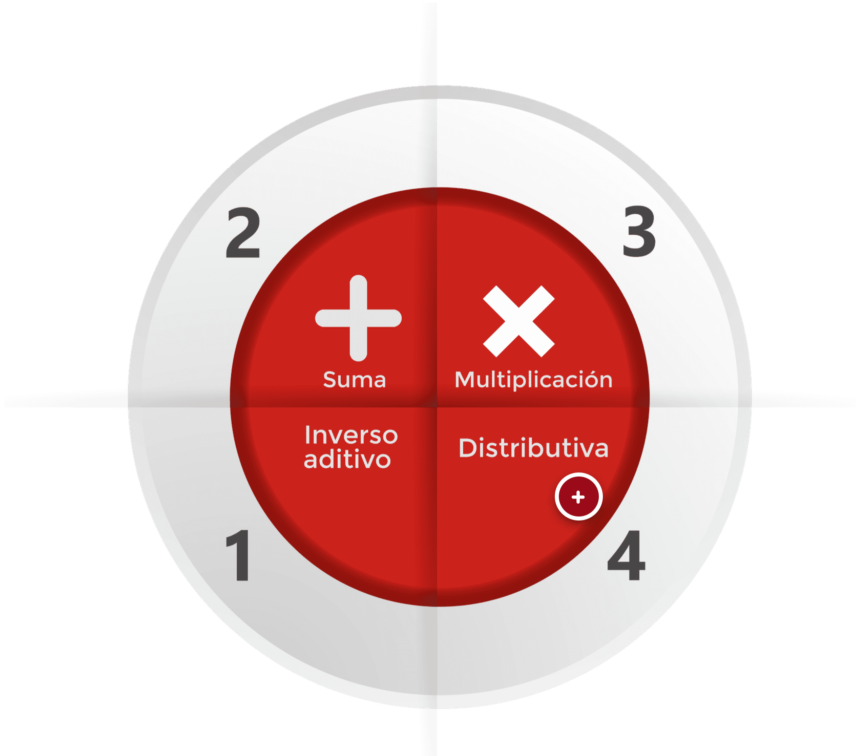




SUMA

El 0 es un número muy importante ya que sin importar que valor estemos operando, dicho valor no cambiara, esto es:

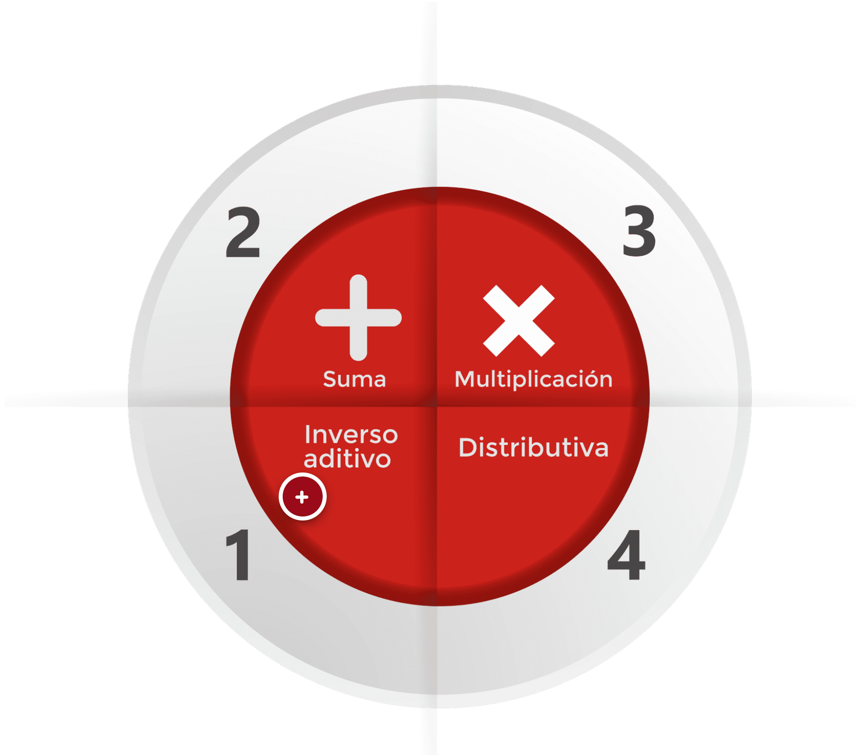
$$a + 0 = a$$



DISTRIBUTIVA

Esta primera propiedad es fundamental ya que podemos ver el **"-"** como el número **-1,** si utilizamos la distributiva tenemos:

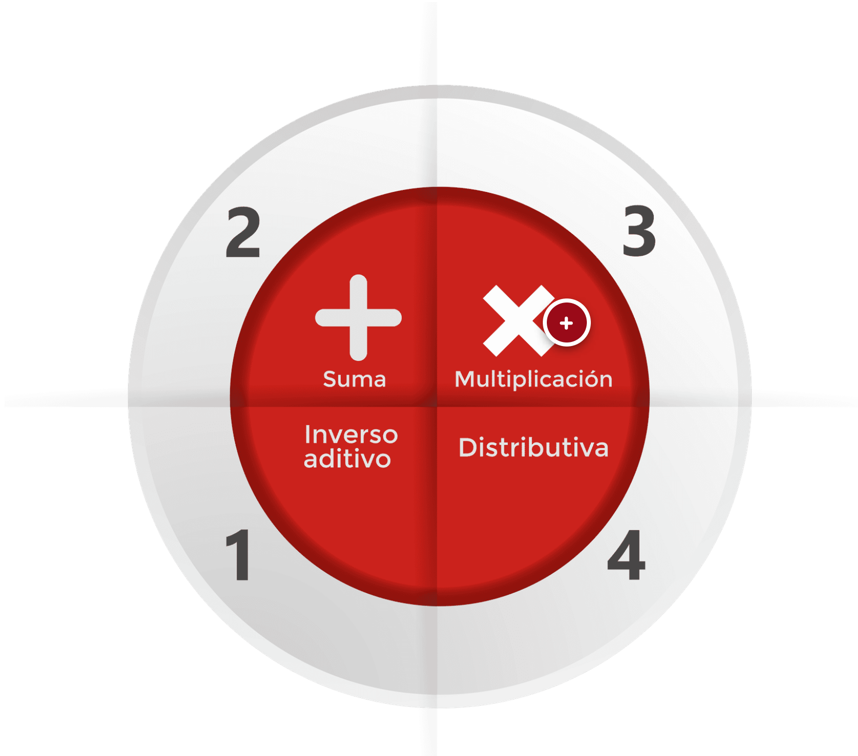
- (a +b) = -a - b y ***- (ab) = (-a)b = a (-b)*** también tenemos que ***(- a)* (-b) = ab*** y con esto ***-(-a)= (-1)(-a) =1 * a = a***



INVERSO ADITIVO

Todo número real, tiene un inverso aditivo denotado por $-a$ que satisface

$a + (-a) = 0$, de manera que podemos ver la sustracción como la suma por una cantidad negativa, lo que es en otras palabras $a-b = a + (-b)$



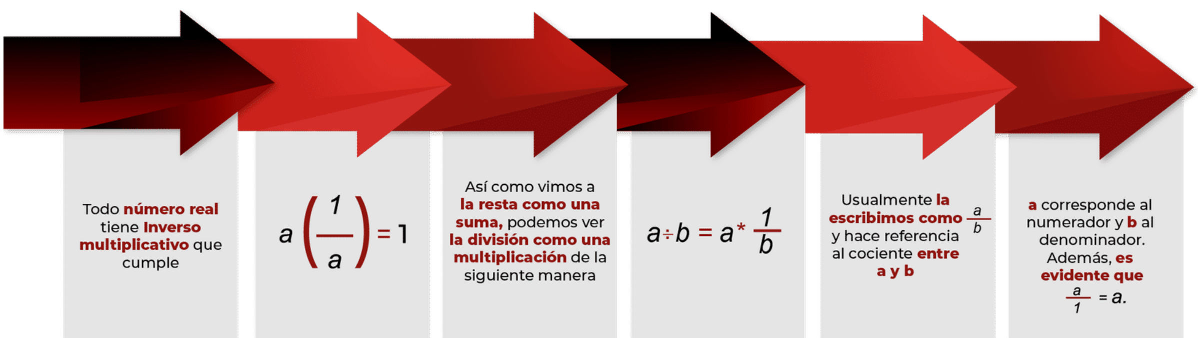
MULTIPLICACIÓN

Existe un número que realiza lo mismo, es decir al operar el valor no cambiará y este es el **1** así $a * 1 = a$

CONTINUAR

Multiplicación y división

De forma similar a lo desarrollado para la suma, para la multiplicación existe un número especial que al operar el valor no cambiará y este es el ***1***, así ***a * 1 = a.***



Para poder trabajar con estas fracciones y con los demás números al simultaneo, seguimos las siguientes propiedades:

Multiplicación

Si queremos multiplicar dos fracciones, multiplicamos sus numeradores y hacemos el cociente con la multiplicación de sus denominadores.

$$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a * c}{b * d}$$

$$\frac{3}{4} * \frac{1}{7} = \frac{3}{28}$$

División

Veámoslo de dos maneras distintas:

- La primera por medio de la ley de medios y externos bien conocida como la oreja (Formada al indicar las operaciones por flechas).
- La segunda a realizar la multiplicación en cruz, s decir numeradores por denominadores.

Primera	Segunda
$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{ad}{bc}$	$\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{cb}$

Suma

La suma es quizás la operación más peculiar de las fracciones en caso de que los denominadores sean distintos, para ello aplicamos la denominada "carita feliz" que corresponde a multiplicar numeradores con denominadores, sumarlos y hacer el cociente con el producto de los denominadores, por raro que suene esto veámoslo.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

Así cuando poseen el mismo denominador es

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$$

Evitar cometer el siguiente **error**

$$\frac{a}{b + c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$$

Esto **NO** es cierto, así que es importante tener cuidado
e identificar cómo funcionan las propiedades.

Simplificación

Cuando el numerador y el denominar poseen factores en común, los podemos cancelar.

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$

Equivalencia

Como consecuencia de la simplificación tenemos fracciones equivalentes como veremos a continuación.

$$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Exponentes y radicales

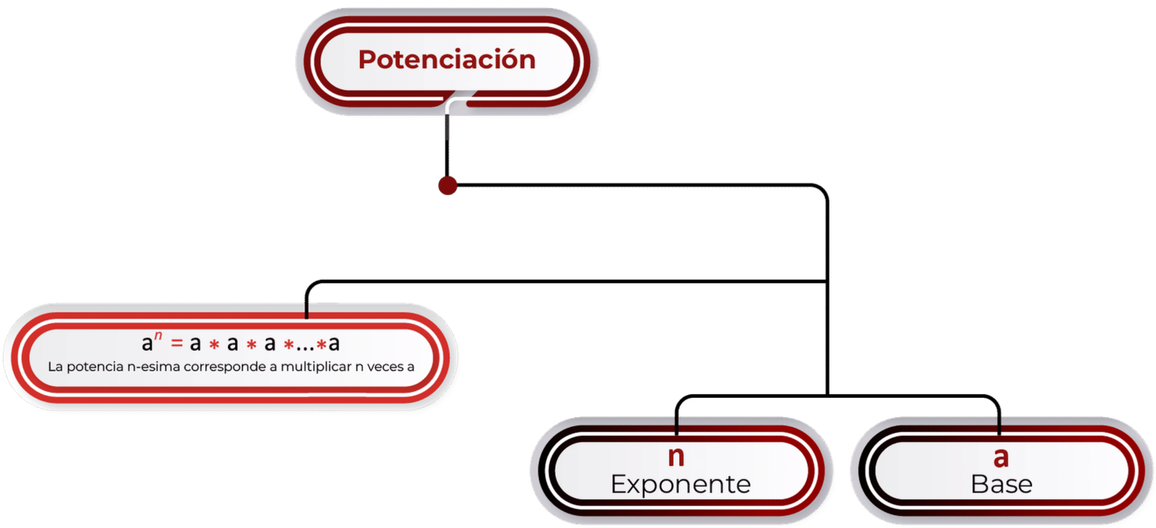
> En el desarrollo técnico de los problemas que se afrontarán **en matemáticas es necesario realizar procesos válidos, ordenados y claros, puesto que un error en el manejo podría estropear al buen trabajo realizado** hasta ese momento

Es necesario conocer cómo podemos manipular las distintas expresiones que nos encontraremos a lo largo de los distintos cursos que involucren a las matemáticas, por eso en esta unidad se abordaran **las leyes de los exponentes y su relación con los radicales.**

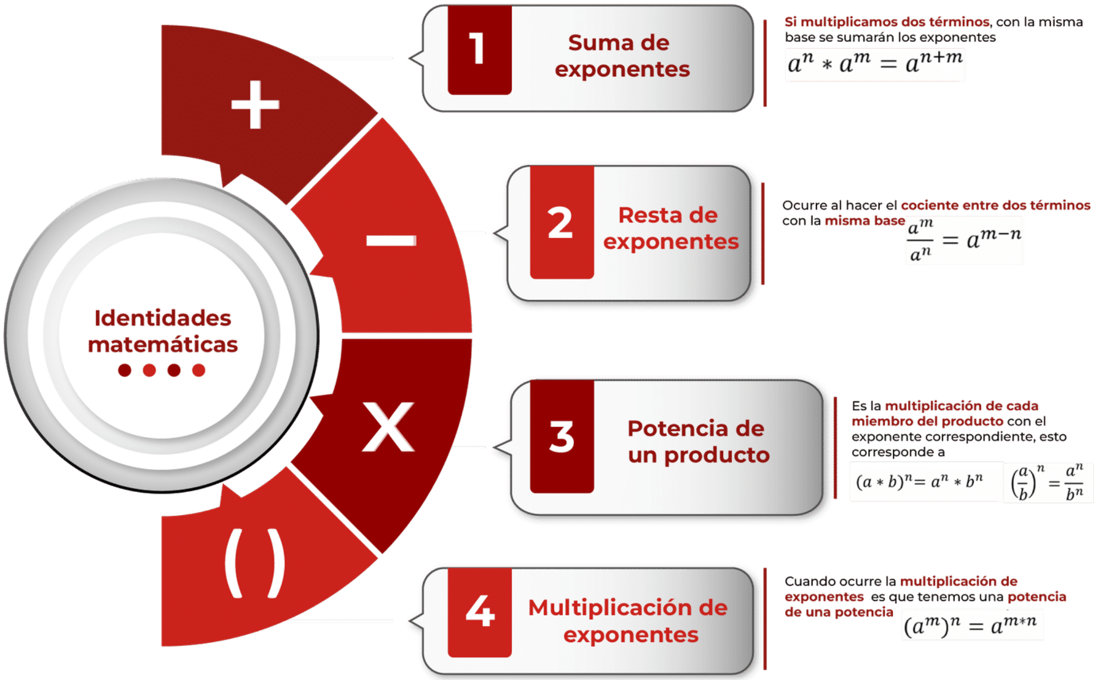
Leyes de los exponentes

Cuando hablamos de **exponentes,** estamos hablando de la **potenciación** que corresponde a **multiplicar un determinado número de veces el mismo término.**

De clic en la imagen para ampliar la información



De clic en la imagen para ampliar la información



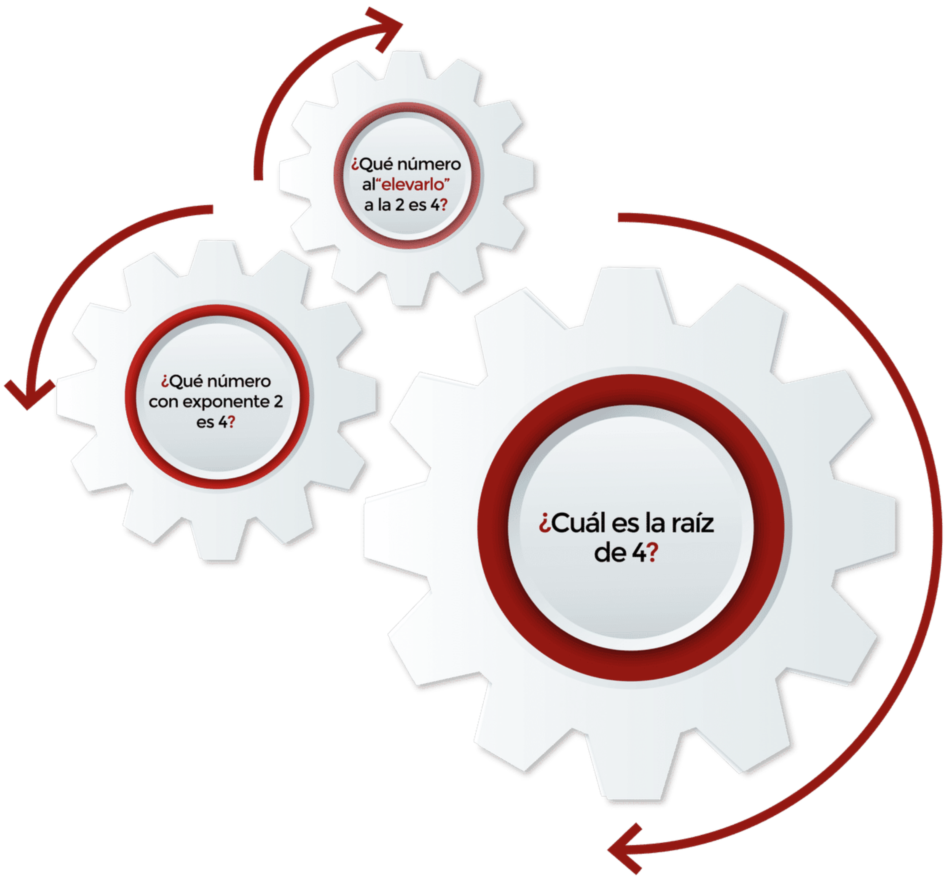
CONTINUAR

Propiedades de las raíces

Así como la **suma** tiene a la **resta** como **operación contraria**, la **multiplicación** a la **división**. Para la **potenciación** es la **radiación**. Veamos primero el caso más popular, el cual corresponde a la **raiz cuadrada**, que se define de la siguiente manera:

$$\sqrt{a} = b \ \leftrightarrow b^2 = a \; con \; a \geq 0$$

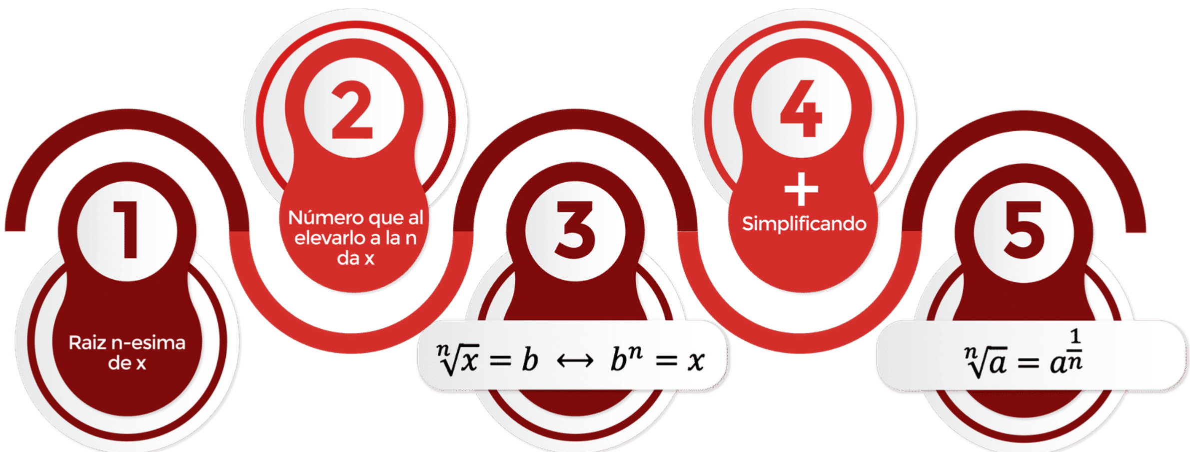
Aquí es importante tener cuidado, ya que por ejemplo



La mayoría de los estudiantes dirán sin dudar **que ese número es 2, sin embargo -2 también satisface la definición anterior.**

Contamos con dos respuestas al hacer la raíz cuadrada una positiva y una negativa. Por esto usualmente denomina raíz principal a la respuesta positiva. Por último, es importante destacar **el valor absoluto el cual corresponde a la raíz**

cuadrada de un numero al cuadrado, este concepto lo abordaremos en una unidad posterior.



Con esto, podemos aplicar todas las leyes de los exponentes a los radicales.

CONTINUAR

Racionalización

Frecuentemente nos encontraremos con radicales en los denominadores, y usualmente será útil no tenerlos en esta posición, el proceso de racionalización permite hacer esto, **consiste en multiplicar por el radical adecuado arriba y abajo**, veamos un par de ejemplos:

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} * \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{a^3}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^3}} * \frac{\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[5]{a^2}} = \frac{\sqrt[5]{a^2}}{a}$$

Logaritmos y exponenciales

Finalmente las ultimas operación que podemos realizar con los números reales corresponden a:

Estas serán fundamentales a lo largo de los distintos niveles de las matemáticas y por eso mismo es necesario conocerlas desde el inicio.

Definición y propiedades de los logaritmos

Paso 1

Leemos $log_b\, a$ como: **¿A que exponente se debe elevar a b para obtener a?** veamos un ejemplo

$$log_2 8 = 3 \text{ ya que } 2^3 = 8.$$

Por lo tanto, los logaritmos cumplen la siguiente relación:

$$log_b\, a = c \;\leftrightarrow\; b^c = a$$

Paso 2

El numero b se denomina base, a corresponde a el argumento. Con esto pasaremos para una de las propiedades más usadas y relevantes de los logaritmos, la llamaremos como "Bajar el exponente" ya que:

$$log_b\, a^c = c\, log_b\, a$$

Con esto, es evidente que $\log_b b^c = c \log_b b = c(1) = c$ y como cualquier número distinto de 0 elevado a la 0 es uno, tenemos que $\log_b 1 = 0$

Logaritmo de un cociente

El aplicar logaritmo a una fracción, es equivalente a realizar la resta del logaritmo del numerador con el logaritmo del denominador $\log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$

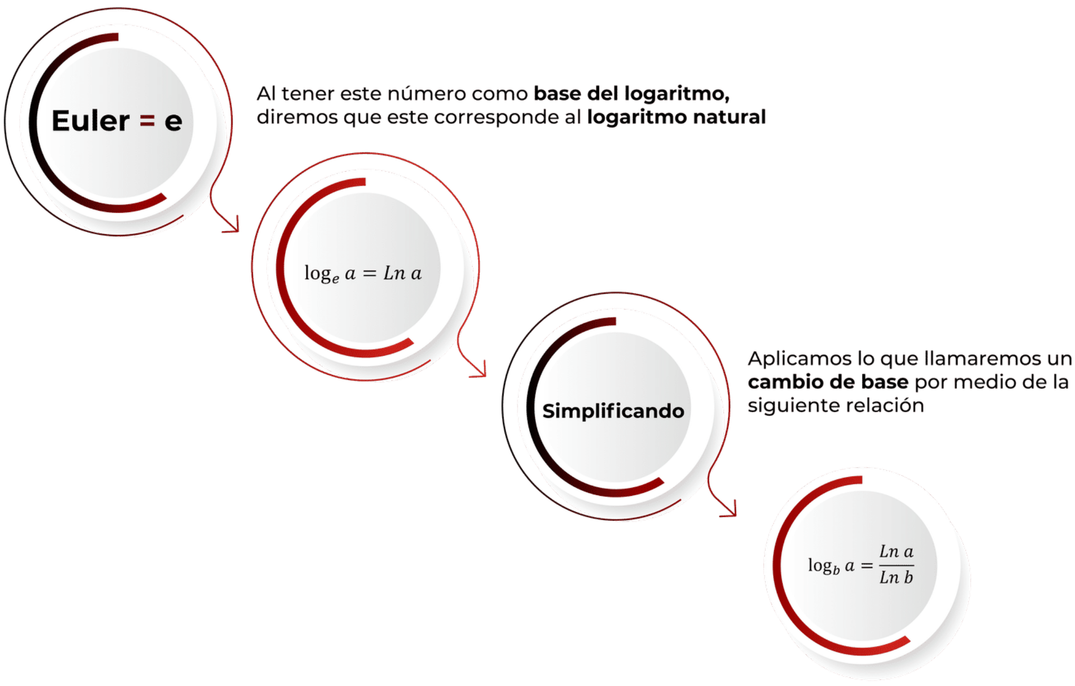
Logaritmo de un producto

Similarmente, al aplicar logaritmo a un producto corresponde a realizar la suma de los logaritmos de los términos del producto $\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$

En ocasiones nos encontraremos logaritmos escritos de la siguiente manera $\log a$ y corresponde a $\log_{10} a$.

Logaritmo y exponencial natural

Existe un número especial, utilizado en muchos campos de las matemáticas y este corresponde al número de **Euler denotado como *e*.**



¡Para explorar!

Amplía las temáticas vistas ingresando a las siguientes páginas :

Julioprofe. (17 de sept de 2024). *PRODUCTO DE MATRICES - Ejercicio 5 (con CASIO Classwiz fx-991LA CW)*. [Video]. YouTube.

IR AL LINK

MateFacil. (12 de noviembre de 2021). *¿SABES DE DÓNDE SALEN LAS FÓRMULAS DE ÁREAS? Aquí te lo EXPLICO*. [Video]. YouTube.

IR AL LINK

Dueñas,H.Rubio,I.(2015).*Cálculo diferencial en una variable*. Universidad Nacional de Colombia

IR AL LINK

CONTINUAR

Bibliografía

- **Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2005).** *Precalculus*: Mathematics for Calculus.
- **Stewart, J. (2012).** *Cálculo de una variable: trascendentes tempranas* (7a. ed.).

Imágenes

- Imágenes libres tomadas desde Freepik. https://www.freepik.es/

Créditos

Autor de contenido:

Johan Andrés Matiz Gaitán

Matemático de la Universidad Distrital

Estudiante de la maestría en Ciencias de la información y las telecomunicaciones