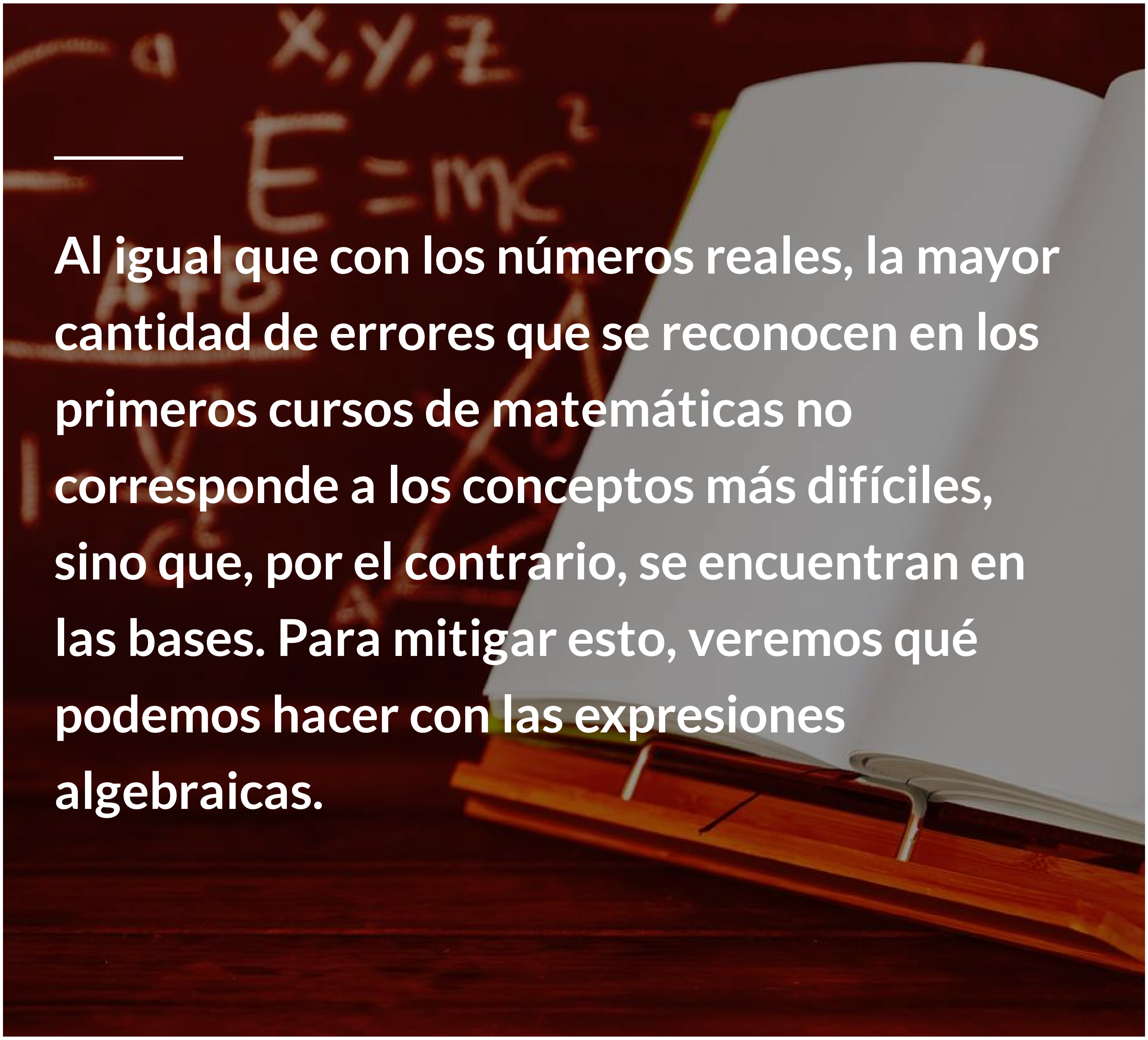
Unidad 2. Operaciones con expresiones algebraicas

TEMAS

Lección 1 de 10

Unidad 2. Operaciones con expresiones algebraicas

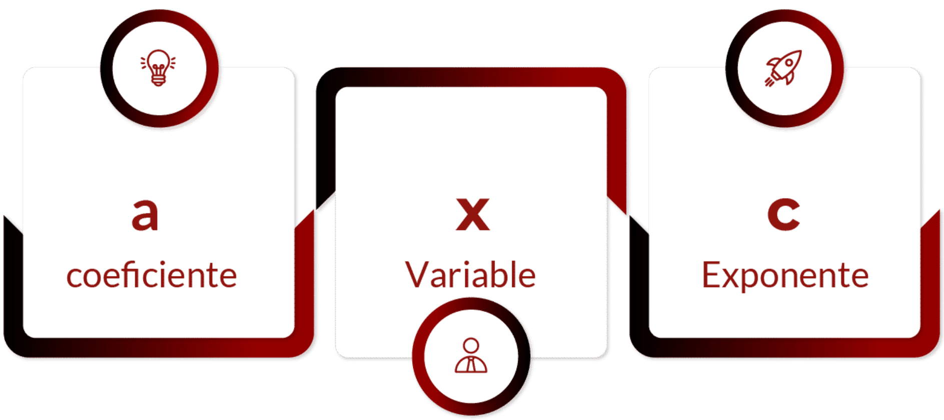


Al igual que con los números reales, la mayor cantidad de errores que se reconocen en los primeros cursos de matemáticas no corresponde a los conceptos más difíciles, sino que, por el contrario, se encuentran en las bases. Para mitigar esto, veremos qué podemos hacer con las expresiones algebraicas.

Definición de expresiones algebraicas

MONOMIOS | POLINOMIO

Las expresiones algebraicas denominadas **monomios** hacen referencia a expresiones de la siguiente forma $\mathbf{ax^c}$ donde



Las **variables** representadas por letras pueden tomar cualquier valor numérico de un conjunto dado.

MONOMIOS

POLINOMIO

Un binomio corresponde a la suma de dos monomios, un trinomio a la suma de tres monomios así de forma general un **polinomio hace referencia a la suma de varios monomios**. Un polinomio en la variable x tendría la siguiente forma :

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+dx^{n-1}+\ldots+rx^1+mx^0$$

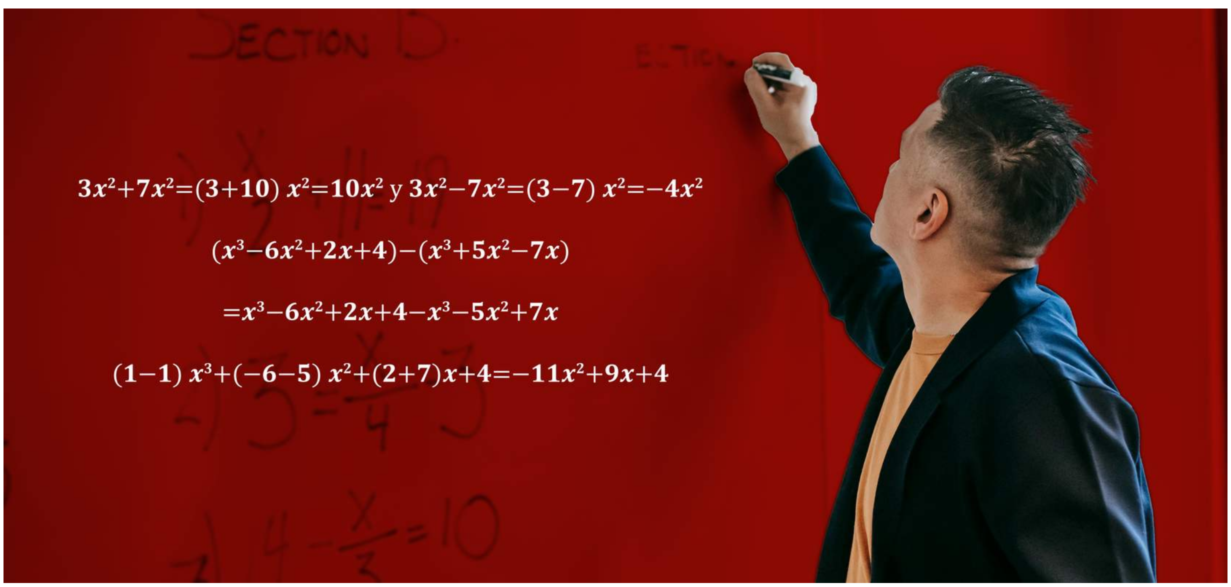
Polinomio	Tipo	Términos	Grado
$2x^2 - 3x + 4$	Trinomio	$2x^2, -3x, 4$	2
$X^8 + 5x$	Binomio	$X^8, 5x$	8
$3 - x + x^2 - \frac{1}{2}x^3$	Cuatro términos	$-\frac{1}{2}x^3, x^2, -x, 3$	3
$5x + 1$	Binomio	$5x, 1$	1
$9x^5$	Monomial	$9x^5$	5
6	Monomial	6	0

CONTINUAR

Lección 3 de 10

Suma y resta de polinomios

Para sumar o restar polinomios, combinamos los términos semejantes, es decir sumamos los coeficientes de aquellos con las mismas variables y con el mismo exponente, veamos un ejemplo de esto



No olvidemos que si un – precede a un paréntesis este cambiara todos los signos de lo que este dentro del paréntesis.

Multiplicación de polinomios

Para realizar el producto entre dos polinomios es necesario **aplicar de forma reiterativa la propiedad distributiva**.

1

$(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)=ac+ad+bc+bd$

El primer término por los otros dos y el segundo termino por los otros dos

$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

2

veamos un ejemplo de esto aplicado al desarrollo del producto de dos polinomios

$(2x+3)(x^2-5x+4)=2x(x^2-5x+4)+3(x^2-5x+4)$

$2x^3-10x^2+8x+3x^2-15x+12$

$2x^3-7x^2-7x+12$

Hay ciertos productos que se presentan frecuentemente, y son denominados **productos notables** sin embargo profundizaremos eso en la **factorización**.

Factorización

Aplicamos **la ley distributiva** para expandir el producto de dos polinomios como vimos en la sección anterior y al contrario la factorización corresponde a expresar un polinomio como el producto de dos polinomios de menor grado.

$$x^2-25=(x-5)(x+5)$$

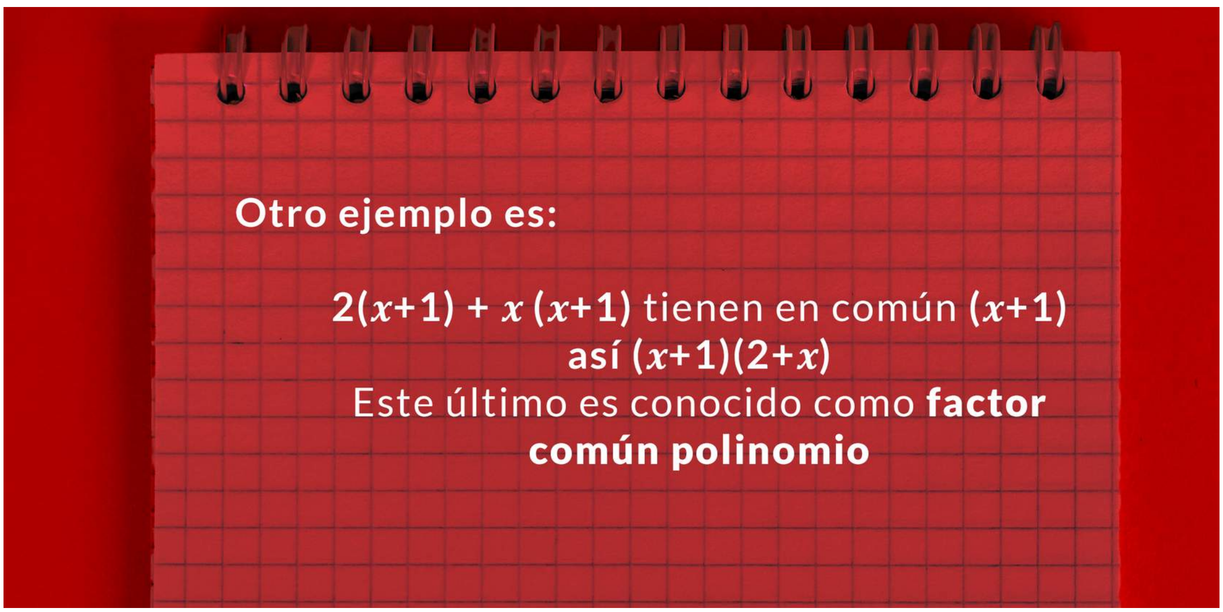
La factorización correspondería a pasar de izquierda a derecha, y la ley distributiva lo que permitiría ir de derecha a izquierda. Se invita al lector a probar este hecho.

Factores comunes

Factor común

Consideremos **ax+ab ambos tienen en común la a** (esta puede ser un número, una variable o incluso una expresión completa) así

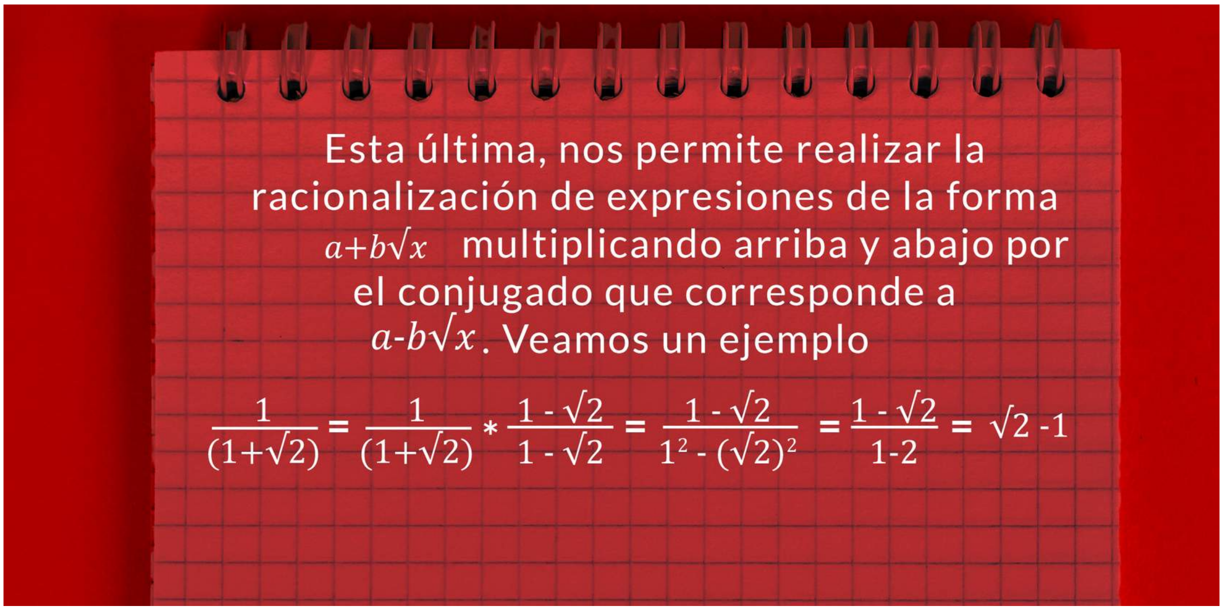
$$\mathbf{ax+ab=a(x+b)}$$



Diferencia de cuadrados

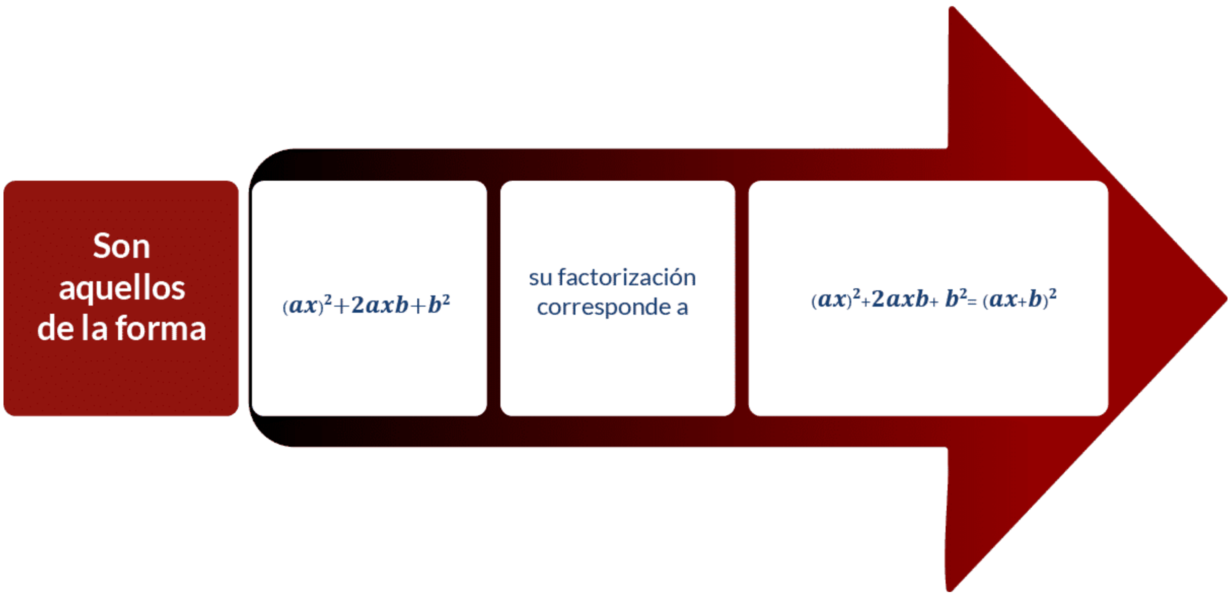
Como su nombre indica esta factorización **se utiliza al tener la diferencia de dos términos elevados al cuadrado** es decir :

$$a^2 - b^2 = (a-b)\,(a+b)$$



Factorización de trinomios

Trinomio cuadrado perfecto



¿Qué tenemos que reconocer? Bueno, pues será un **trinomio cuadrado** perfecto **si el término del medio es dos veces la raíz del primero por la raíz del tercero.**

Ejemplo

1. $25x^2+30x+9$

2. **La raíz del primero seria $5x$, la raíz del tercero es 3 y el termino del medio es $2(5x)(3)=30x$**

3. **Por lo tanto es un trinomio cuadrado perfecto de manera que**

4. $25x^2+30x+9 = (5x+3)^2$

Trinomio por tanteo

Aquí seguramente diferiremos de los nombres, este caso de factorización aplica únicamente cuando el coeficiente del primer término del polinomio es 1 es decir, los trinomios de la forma x^2+rx+s, en caso de poder factorizar nuestro trabajo corresponderá a encontrar dos números tales que r=a+b y s=a ∗ b, Si existen la factorización queda como

$$x^2 + rx + s = (x+a)\,(x+b)$$

$$x^2 + 5x + 6 = (x+3)\,(x+2)$$

Finalmente, que pasa si tiene un coeficiente distinto de 1, en ese caso surge el siguiente caso de factorización que denominaremos **caso especial**, entonces estamos hablando de trinomios de la forma

$ax^2 + bx + c.$

Para ello, la mejor forma de explicarlo es por medio de un ejemplo, consideremos el siguiente trinomio

$2x^2 + 7x - 4$ lo que haremos será escribir el término del medio como la suma de dos monomios, en este caso quedará como

$2x^2 + 8x - x - 4$ notemos que $8x - x = 7x$

De manera que podemos sacar dos factores comunes, uno para los primeros dos términos y otro para los dos últimos

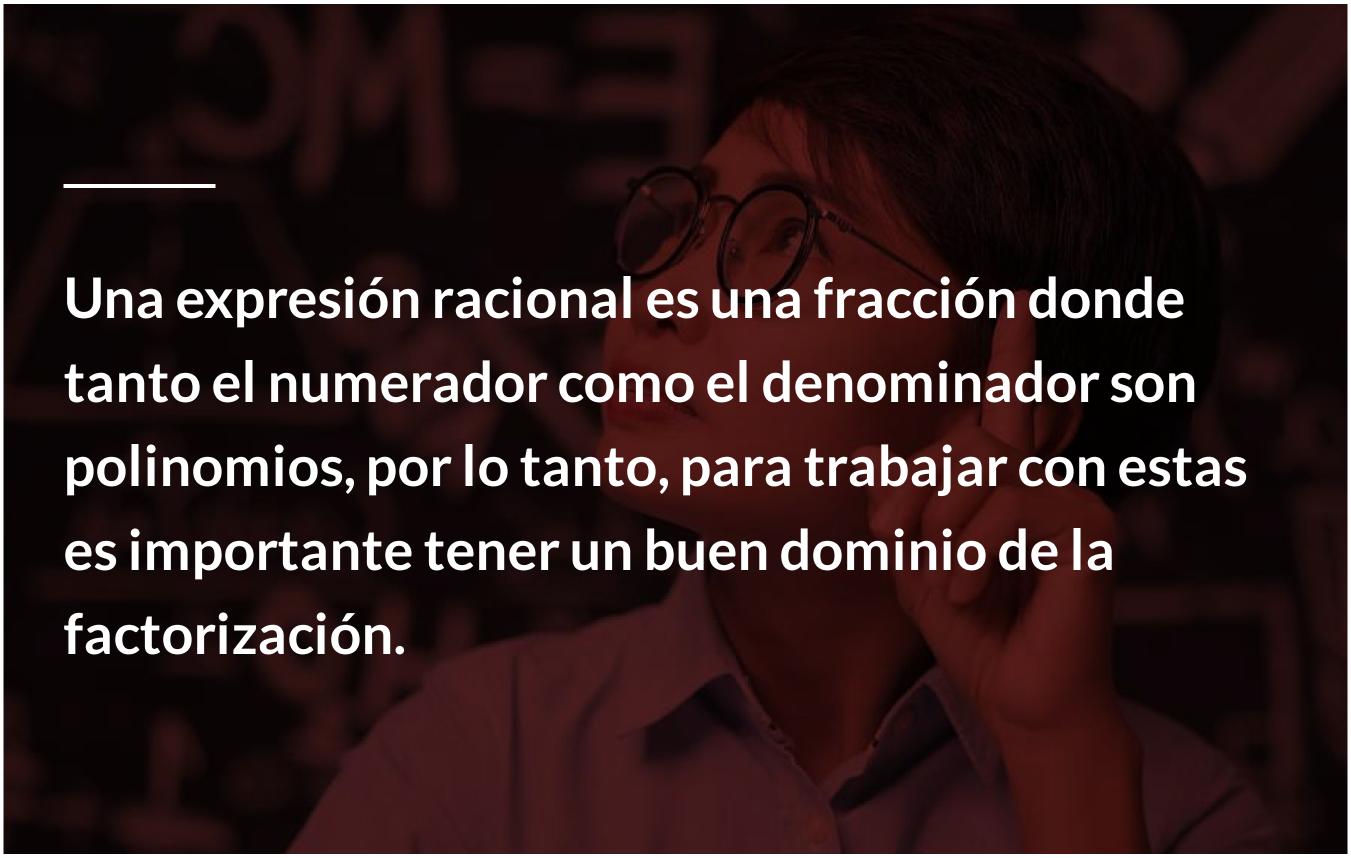
$2x (x+4) -1 (x+4)$ y con esto aplicando factor común

$(2x-1)(x+4)$ por lo tanto

$2x^2 + 7x - 4 = (2x-1) (x+4)$. A diferencia de los otros trinomios este último casi no tiene un algoritmo a seguir para solucionar.

Lección 8 de 10

Expresiones racionales



Simplificación de expresiones racionales —

Para simplificar las expresiones racionales, necesitamos factorizar tanto numerador y denominador y que en este proceso surjan términos semejantes y aplicaremos la simplificación de fracciones que trabajamos en las fracciones de números reales. Ejemplificando:

$$\frac{(x^2-25)}{(x^2-3x-10)} = \frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)(x+2)} = \frac{(x+5)}{(x+2)}$$

Tenga presente que solo podemos cancelar cuando tenemos factores, es decir términos que están multiplicando, uno de los errores más grandes es cancelar las x^2 dando, así como resultado

$$\frac{(-25)}{(-3x-10)}.$$

Suma y resta de expresiones racionales —

Las expresiones racionales esencialmente **son fracciones**, entonces para sumarlas utilizamos la suma de fracciones aprendida en la primera unidad, agregando que si podemos factorizar y simplificar lo haríamos.

$$\frac{3}{x-1} + \frac{x}{x+3} = \frac{3(x+3)+x(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x+2}$$

Multiplicación y división de expresiones racionales

Siguiendo con la perspectiva trabajada con la suma, trabajaremos como lo vimos con los números reales, sin embargo, en este caso factorizaremos y simplificaremos para reducir la longitud de las expresiones resultantes.

$$\frac{x^2+2x-3)}{x^2+8x+16} * \frac{3x+12}{x-1} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+4)^2} * \frac{3(x+4)}{(x-1)} = \frac{3(x+3)}{(x+4)}$$

En este caso factorizamos antes de realizar las operaciones para evitar realizar la extensa multiplicación que saldría como resultado de la ley distributiva.

De forma análoga, trabajaríamos para la división con la operación definida en los números reales teniendo presente la factorización y simplificación.

¡Para explorar!

Amplía las temáticas vistas ingresando a las siguientes páginas :

julioprofe. (Agosto de 2009). Factorización. [Video]. YouTube.

IR AL LINK

julioprofe. (Abril de 2009). Fracciones algebraicas. [Video]. YouTube.

IR AL LINK

MateFacil. (24 de octubre de 2016). Cómo simplificar una fracción algebraica muy fácil. [Video]. YouTube.

IR AL LINK

MateFacil. (30 de Junio de 2021). 15.Factorización: Factor común y agrupación DESDE CERO, MUY FÁCIL. [Video]. YouTube.

IR AL LINK

Dueñas.H & Rubio.I. (2015).Cálculo diferencial en una variable. Universidad Nacional

IR AL LINK

Bibliografía

- **Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2005).** *Precalculus*: Mathematics for Calculus.
- **Stewart, J. (2012).** *Cálculo de una variable: trascendentes tempranas* (7a. ed.).
- **Larson, R., & Edwards, B. H. (2020).** *Cálculo (11ª ed.)*. Cengage Learning.

Imágenes

- Imágenes libres tomadas desde Freepik. https://www.freepik.es/
- Imágenes libres tomadas desde Pexels. https://www.pexels.com/

CONTINUAR

Créditos

Autor de contenido:

Johan Andrés Matiz Gaitán

Matemático de la Universidad Distrital

Estudiante de la maestría en Ciencias de la información y las telecomunicaciones